ICA

1. Korrelációs mátrix

Tegyük fel, hogy adott három csatorna és $N = 3$ mérést végeztünk:

$$y_1 = [1, 1, 4, 3, 4, 5, 1, 3, 2, 5]$$
$$y_2 = [4, 2, 2, 1, 4, 4, 2, 3, 1, 1]$$
$$y_3 = [3.35, 1.85, 2.90, 1.80, 4.40, 4.75, 1.85, 3.30, 1.45, 2.50]$$

Az átlagok segítségével, amelyek $\overline{y}_1 = 2.9$, $\overline{y}_2 = 2.4$ és $\overline{y}_3 = 2.815$, a centralizált vektorok

$$y'_1 = [-1.9, -1.9, 1.1, 0.1, 1.1, 2.1, -1.9, 0.1, -0.9, 2.1]$$
$$y'_2 = [1.6, -0.4, -0.4, -1.4, 1.6, 1.6, -0.4, 0.6, -1.4, -1.4]$$
$$y'_3 = [0.535, -0.965, 0.085, -1.015, 1.585, 1.935, -0.965, 0.485, -1.365, -0.315]$$

(Octave: `y-mean(y)*ones(1,length(y))`)
Ebből létrehozhatunk egy mátrixot:

$$Y = \begin{bmatrix} -1.9 & 1.6 & 0.535 \\ -1.9 & -0.4 & -0.965 \\ 1.1 & -0.4 & 0.085 \\ 0.1 & -1.4 & -1.015 \\ 1.1 & 1.6 & 1.585 \\ 2.1 & 1.6 & 1.935 \\ -1.9 & -0.4 & -0.965 \\ 0.1 & 0.6 & 0.485 \\ -0.9 & -1.4 & -1.365 \\ 2.1 & -1.4 & -0.315 \end{bmatrix}$$

Ehhez a méréssorozathoz tartozó kovariancia mátix

$$V_Y = \frac{1}{N-1} Y^T Y = \begin{bmatrix} 2.54444 & 0.15556 & 1.00722 \\ 0.15556 & 1.60000 & 1.25444 \\ 1.00722 & 1.25444 & 1.29336 \end{bmatrix}$$

A spektrális felbontása ennek a mátrixnak (`[U,D]=eig(V)`) a következő:

$$D = \begin{bmatrix} -6.9687e-16 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9617e+00 & 0 \\ 0 & 0 & 3.4761e+00 \end{bmatrix}$$

és

Date: March 2, 2017.

$$U = \begin{bmatrix} -0.26963 & -0.66957 & -0.69208 \\ -0.57778 & 0.68745 & -0.43999 \\ 0.77037 & 0.28123 & -0.57222 \end{bmatrix}$$

Ahol $V_Y = UDU^T$ alakban írható fel. Ez lényegében az Y szinguláris érték dekompozíciójának a fele. Mivel a D mátrix egyik sajátértéke gyakorlatilag 0 ezért a V mátrix rangja 2. Ezért V_Y felírható úgy is mint

$$V_Y = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{U}^T = \begin{bmatrix} -0.66957 & -0.69208 \\ 0.68745 & -0.43999 \\ 0.28123 & -0.57222 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.9617 & 0 \\ 0 & 3.4761 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.66957 & 0.68745 & 0.28123 \\ -0.69208 & -0.43999 & -0.57222 \end{bmatrix}$$

2. Kiegészítés

Tegyük fel, hogy valamelyik sajátértékhez (mondjuk a legnagyobbhoz) tartozó komponenst szeretnénk látni, azaz azt a transzformált "jelet", amely az adott (esetünkben a legnagyobb) varianciával rendelkezik.

Az egyik legfontosabb tulajdonsága az U mátrixnak, hogy esetünkben orthogonális (általános esetben unitér), azaz $U^TU = UU^T = I$, ahol az I az identitás mátrix (diagonális mátrix amelynek a főátlójában csupa 1-es áll).

Mivel $V_Y = UDU^T$ és $V_Y = \frac{1}{N-1}Y^TY$ ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1}Y^TY &= UDU^T \\ \frac{1}{N-1}U^TY^TY &= U^TUDU^T = IDU^T = DU^T \\ \frac{1}{N-1}U^TY^TYU &= DU^TU = DI = D \\ \frac{1}{N-1}(YU)^TYU &= D \end{aligned}$$

mivel ha van két mátrixunk, Y és U akkor ezek szorzatának a transponáltja $(YU)^T = U^TY^T$. Az YU mátrix – ami egy 10×3-as mátrix – oszlopai felfoghatók úgy is mint 3 jel és ezeknek az új jeleknek a korelációs mátrixa a nagyon egyszerű szerkezetű D diagonaliás mátrix. Ami pontosan azt jelenti, hogy az YU mátrix vektorai korrelálatlanok (de nem feltétlenűl függetlenek!).

$$YU = \begin{bmatrix} 0 & 2.5226 & 0.30483 \\ 0 & 0.72582 & 2.0431 \\ 0 & -0.98760 & -0.63393 \\ 0 & -1.3148 & 1.1276 \\ 0 & 0.80914 & -2.3722 \\ 0 & 0.23800 & -3.2646 \\ 0 & 0.72582 & 2.0431 \\ 0 & 0.48191 & -0.61073 \\ 0 & -0.74369 & 2.0199 \\ 0 & -2.4571 & -0.65713 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy ugyanúgy ahogy a mi esetünkben is, a D mátrixban lévő sajátértékek nem-növekvő sorrendben vannak. Ha a legnagyobb sajátértékűhöz tartozó transzformált jelet keressük, akkor az az YU mátrix utolsó oszlopa, mert a mátrixszorzás szabályai alapján a $D_{3,3}$ elemet az $(YU)^T$ utolsó sorának és az YU utolsó oszlopának az összeszorzásából kapjuk (és persze az eredényt el kell osztani $N-1$-el, ami jelenleg 9). Az YU utolsó oszlopát pedig a mátrix szorzás szabályai alapján úgy kaphatjuk meg, hogy az Y mártixot (ami $N \times 3$-as, azaz 10×3-as) megszorozzuk az U utolsó oszlopával, ami 3×1-es. Az így kapott 10×1-es vektor a kereset jel. (És pontosan ezt mondta Sándor a valódi adatoknál...)